# Inhaltsverzeichnis


3.2 Stetige Funktionen . . . 3
3.2.1 Definition . . . 3
3.2.2 Beispiel . . . 3
3.2.3 Beispiel . . . 3
3.2.4 Satz . . . 4
3.2.5 Definition . . . 4
3.3 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktion . . . 5
3.3.1 Satz (Zwischenwertsatz) . . . 5
3.3.2 Beispiel . . . 5
3.3.3 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion) . . . 5
3.3.4 Definition . . . 6
3.3.5 Definition . . . 6
3.3.6 Satz . . . 6
3.3.7 Satz (natürlicher Logarithmus) . . . 8
3.3.8 Definition (allgemeine Potenz) . . . 9

**4 Differentierbare Funktionen einer reellen Variable 10**
4.0.1 Definition . . . 10
4.0.2 Satz . . . 11
4.0.3 Korollar . . . 12
4.0.4 Satz (Rechenregeln) . . . 12
4.0.5 Beispiele . . . 13
4.0.6 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) . . . 14
4.0.7 Beispiel . . . 15
4.0.8 Satz (Kettenregel) . . . 15
4.0.9 Definition . . . 16
4.1 Lokale Extrema, der Mittelwertsatz . . . 17
4.1.1 Definition . . . 17
4.1.2 Satz . . . 17
4.1.3 Satz (Rolle) . . . 18
4.1.4 These (Mittelwertsatz) . . . 18
4.1.5 Korollar . . . 19
4.1.6 Korollar . . . 19
4.1.7 Korollar . . . 20
4.2 Trigonometrische Funktionen . . . 20
4.2.1 Lemma . . . 20
4.2.2 Satz (Rechenregeln) . . . 21

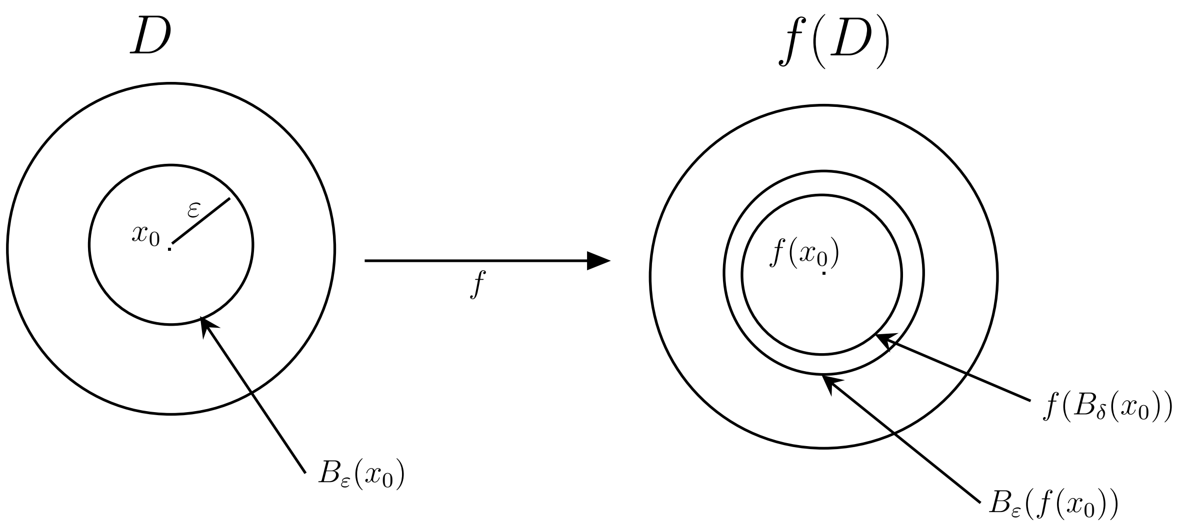
4.2.3 Lemma . . . . . . . . . . 22
4.2.4 Lemma . . . . . . . . . . 24

**5 Das eindimensionale Riemannsche Integral** **26**
5.1.1 Definition . . . . . . . . . . 26
5.1.2 Definition . . . . . . . . . . 27
5.1.3 Lemma . . . . . . . . . . 27
5.1.4 Definition . . . . . . . . . . 28
5.1.5 Lemma . . . . . . . . . . 28
5.1.6 Definition . . . . . . . . . . 28
5.1.7 Satz (I Integrabilitätskriterium) . . . . . . . . . . 29

## 3.2 Stetige Funktionen

### 3.2.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $f : D \mapsto \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Die Funktion f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall \ x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
$|x - y| = d(x, y)$
$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in D : d(x, y) < \varepsilon\}$




$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ mit $f(B_\varepsilon(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$
f heißt stetig, falls f in jedem $x \in D$ stetig ist.

### 3.2.2 Beispiel

Die Funktion $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ mit stetig.
Sei: $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$
$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x - x_0| \leq \delta(2|x_0| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \cdot 2|x_0| + 1 = \varepsilon$
Wähle $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1})$

### 3.2.3 Beispiel

Die Exponentialfunktion ist stetig.

i) Wir wollen zunächst zeigen, dass $\exp(x)$ um $x_0 = 0$ stetig ist.

   $\exp(x) - \exp(0) = \sum_{\frac{x^n}{n!}=0}^{\infty} -1 = \sum_{\frac{x^n}{n!}=1}^{\infty} = x(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots)$

   $|\exp(x) - \exp(0)| \leq |x| \cdot (1 + \frac{|x|}{2!} + (\frac{|x|}{2})^2 + \dots + (\frac{|x|}{n})^n)$

   Nehme an, $|x| < 1$

$\Longrightarrow |\exp(x) - \exp(0)| \leq |x| \frac{1}{(1-\frac{|x|}{2})} \leq 2|x|$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{2})$

$\Longrightarrow |\exp(x) - \exp(0)| \leq 2\delta \leq \frac{2}{3}\varepsilon \leq \varepsilon$

ii) Die Stetigkeit bei $x_0 = 0$ folgt mit Hilfe der Funktionalgleichung:

$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x_0)(\exp(x-x_0)-1)| \leq |\exp(x_0)| \cdot 2|x-x_0|$ (falls $|x-x_0| < 1$)

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3|\exp(x_0)|})$

□

### 3.2.4 Satz

Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \mapsto x$ auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

**Beweis**

i) Hinrichtung ($\Rightarrow$):

Sei $f$ stetig d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Sei $x_0 \in D$ eine Folge mit $x_n \mapsto x_0$, d.h.

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, N \text{ mit } |x_n - x_0| < \delta\ \forall\, n \geq \mathbb{N} \qquad (+)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$, so dass $(*)$ gilt und anschließend N, so dass $(+)$ gilt.

$\Longrightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall\, n \geq N$

ii) Rückrichtung ($\Leftarrow$):

Nehme an, dass $f$ in $x_0$ nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

$\Longrightarrow\ x_n \to x_0$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$. Ein Widerspruch.

□

### 3.2.5 Definition

Man schreibt für $x_0 \in D : \lim f(x) = c$
$D \ni x \to x_0$ falls es für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \in D$ mit $x_n \to x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$
Wir können dann schreiben
$f$ in $x_0$ stetig $\Leftrightarrow \lim\limits_{D \ni x \to \infty} f(x) = \lim f(x_0)$

## 3.3 Zwischenwertsatz und Umkehrfunktion

### 3.3.1 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann gibt es in jedem Wert $c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (also $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(b) \leq c \leq f(a)$) eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$
Beachte reelle Funktionen

**Beweis:** Œ $f(a) < f(b)$ (somit ersetze $f$ durch $-f$ und $c$ durch $-c$; falls $f(a) = f(b)$ ist wähle $\xi = a$)
Außerdem können wir annehmen, dass $f(a) < c < f(b)$
Betrachte die Menge $M = \{x : a < x \leq b \wedge f(x) \geq c\}$
Da $f(a) > c$ ist $M$ nicht leer, außerdem ist sie offensichtlich beschränkt.
Wir setzen $\xi = \inf M$
Darum gibt es eine Folge $(x_n)$ mit $x_n \in M$ und $x_n \to x := \xi$
Da $f$ stetig ist, folgt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$
$\implies f(x) \geq c$ (Œ nach Vorr. von $M$)
Wäre $f(x) > c$, dann gäbe es wegen der Stetigkeit von $y$
$B_\varepsilon(f(x_0))$ mit $a < y < x$ und $f(y) > c$
$\implies y \in M$. Damit wäre $x = \xi$ nicht das Infimum von $M$.

### 3.3.2 Beispiel

Jedes ungerade reelle Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2k} x^{2k} + a_{2k+1} x^{2k+1}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{R}$ besitzt wenigstens eine reelle Nullstelle.

**Beweis:** Das Polynom ist stetig (im Prinzip so wie bei $f(x) = x^2$ oder eleganter später) und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$ oder $\mp\infty$
(Schreibweise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bedeutet: Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to +\infty$, $x_n \to \infty$ bedeutet $\forall\ k > 0\ \exists\ N$ mit $x_n > k\ \forall\ n \geq N$)
Genauer: $f(x) = x^{2k+1}(a_{2k+1} + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}})$ also $\exists\ k$ mit $|(a_{2k+1} + \ldots)| \geq \frac{1}{2}|a_{2k+1}| > 0 \implies |f(x)| \geq |x|^{2k+1} \cdot \frac{1}{2}|a_{2k+1}| \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und hat das gleiche Vorzeichen wie $a_{2k+1}$
Also gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Wende nun den Zwischenwertsatz an.

### 3.3.3 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und injektiv mit Wertebereich $W \subset \mathbb{R} = f([a, b])$. Dann ist $f^{-1} : W[a, b]$ ebenfalls stetig.

**Beweis:** Sei $y \in W$. Wir müssen zeigen, dass für jede Folge $(y_n)$ mit $y_n \in W$ und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ auch die Folge $f(y_n)$ konvergiert.
Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$. Nehme umgekehrt an, dass $(x_n)$ nicht konvergent ist. Da $x_n \in [a,b]$ wissen wir nach Bolzano-Weierstraß, dass $x_n$ einen HP besitzt. Da $(x_n)$ nicht konvergiert, gibt es wenigstens zwei HP. Dabei können wir eine Teilfolge $(x_{n_k})$ wählen, so dass
$x_{n_k} \to z \neq y = f^{-1}(y)$
Da $f$ stetig ist, konvergiert dann auch die Folge $f(x_{n_k}) \to f(z)$
Da $z \neq x$ nach $f$ injektiv folgt $f(z) \neq f(x) = y$
Also $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \neq y$
Andererseits ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ und somit auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} = y$. Dies ist ein Widerspruch.

□

### 3.3.4 Definition

Unter einem uneigentlichen Intervall versteht man eine der Mengen $(a,\infty)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ oder $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$
Wir nennen $I$ ein verallgemeinertes Intervall, wenn es ein Intervall oder ein uneigentliches Intervall ist.
z.B. $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < \infty\}$

### 3.3.5 Definition

Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ heißt

| | |
|---|---|
| monoton wachsend | falls $f(x) \leq f(y)$ |
| streng monoton wachsend | falls $f(x) < f(y)$ |
| monoton fallend | falls $f(x) \geq f(y)$ |
| streng monoton fallend | falls $f(x) > f(y)$ |

für alle $x,y \in D$ mit $x < y$
Jede streng monotone Funktion ist injektiv, denn ist $x \neq 0$ $(x,y \in D) \implies x < y$ oder $y < x \implies f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x) \implies f(x) \neq f(y)$, also ist f injektiv.

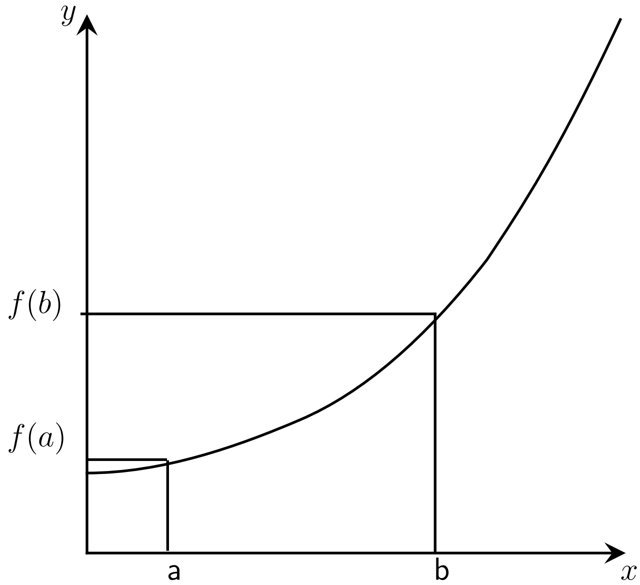
### 3.3.6 Satz

Eine stetige, streng monotone Funktion $f\colon I \mapsto \mathbb{R}$ auf einem verallgemeinerten Intervall $I$ bedeutet eine stetige und monotone Umkehrfunktion $g = f^{-1}\colon I^* \mapsto \mathbb{R}$ auf dem verallgemeinerten Intervall $I^* = f(I)$

**Beweis**

i) Sei zunächst $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Da $f$ injektiv ist, besitzt $f$ nach Satz 3.3.3 eine stetige, inverse $f^{-1}\colon f([a, b]) \mapsto \mathbb{R}$

   Nach dem Zwischenwertsatz ist $f([a, b]) = I^*$ ein Intervall, dessen Endpunkte wegen der Monotonie gerade $f(a)$ und $f(b)$ sind.




ii) Sei nun $I$ ein verallgemeinertes Intervall.

   Setze $I^* = f(I) \subset \mathbb{R}$ und bilde $\zeta := \inf I^*$, $\eta := \sup I^*$

   Da $f$ streng monoton ist, $\zeta$, $\eta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ist $\zeta < \eta$

   (Wir schließen den trivialen Fall $I = [a, a]$ aus)

   Wähle Folgen $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ mit $\zeta < \alpha_j < \beta_j < \eta$ und $\alpha_j \to \zeta$, $\beta_j \to \eta$

   und $(\alpha_j)$ monoton fallende, $(\beta_j)$ monoton steigende Folge.

   (Kurznotation: $\alpha_j \searrow \zeta$, $\beta_j \nearrow \eta$)

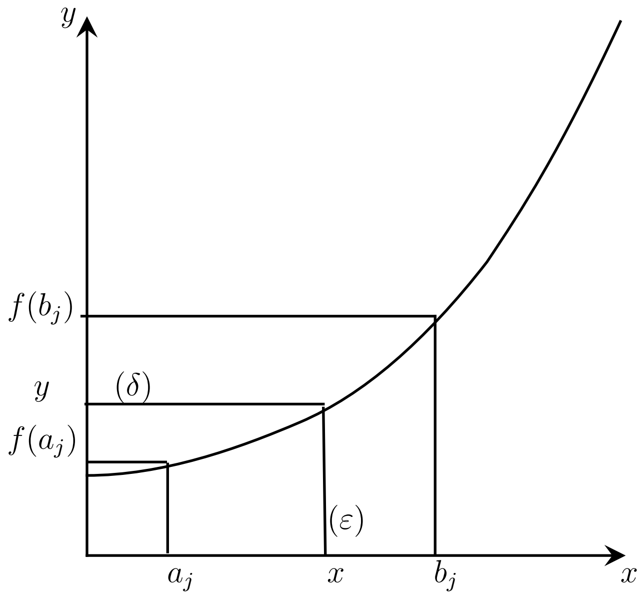
   Wähle Punkte $a_j$, $b_j \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} \alpha_j = f(a_j), \beta_j = f(b_j) & \text{falls } f \text{ monoton steigend} \\ \alpha_j = f(b_j), \beta_j = f(a_j) & \text{falls } f \text{ monoton fallend} \end{cases}$$

   Dann ist $a_j < b_j$ mit $f([a_j, b_j]) = [\alpha_j, \beta_j]$ nach Zwischenwertsatz.

   Da $f$ streng monoton und daher injektiv ist, gibt es Inverse $f^{-1}\colon I^* \mapsto I$

   Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt, dass $f^{-1}$ stetig ist.




Sei $x \in I$, $y = f(x) \in I^*$

Da $\alpha_j \searrow \inf I^*$, $\beta_j \nearrow \sup I^*$ gibt es ein $j$, so dass

$j \in (\alpha_j, \beta_j) \implies x \in (a_j, b_j)$

Argumentiere jetzt mit der Einschränkung $\inf[a_j, b_j]$

$h = f|_{[a_j,b_j]}$: $[a_j, b_j] \mapsto [\alpha_j, \beta_j]$ und $h^{-1}$: $[\alpha_j, \beta_j] \mapsto [a_j, b_j]$

ist nach Satz 3.3.3 stetig.

Aber: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ so dass $h^{-1}(B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x))$

Wenn wir $\varepsilon$, $\delta$ so klein wählen, dass $B_\varepsilon(x) \subset [a_j, b_j]$ und $B_\delta(y) \subset [\alpha_j, \beta_j]$ so gilt auch $f^{-1}(B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x))$

$\square$

### 3.3.7 Satz (natürlicher Logarithmus)

$x \in \mathbb{R}$, $x > 0$
Die Exponentialfunktion exp: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ besitzt eine stetige Inverse log: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, den natürlichen Logarithmus.
Es gilt die Funktionalgleichung
$\log(x, y) = \log(x) + \log(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$

**Beweis**

i) exp ist streng monoton steigende

Für $\zeta > 0$ gilt: $\exp \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \cdots > 1$

Sei nun $x < y$

$$\Longrightarrow \exp(x) - \exp(y) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - \exp(\overbrace{y - x}^{=\zeta}))}_{<0} < 0$$

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\exp(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3!} + \cdots \geq 1 + n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Es folgt, dass $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$

Nach Satz 3.3.6 gibt es eine stetige Inverse log: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$

iii) $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y)$

$\Longrightarrow \log(\underbrace{\exp(x)}_{=:u} \cdot \underbrace{\exp(y)}_{=:v}) = \log(\exp(x + y)) = x + y$

$u = \exp(x) \quad v = \exp(y) \implies x = \log(u) \quad y = \log(v)$

$\Longrightarrow \log(u, v) = \log(u) + \log(v)$

$\square$

Mit Hilfe des Logarithmus kann man die allgemeine Potenz einführen.
$x^\alpha = (e^{\log x})^\alpha = e^{\alpha \cdot \log x} = \exp(\alpha \cdot \log x)$
(formale Rechnung mit Potenzgesetzen aus der Schule)

### 3.3.8 Definition (allgemeine Potenz)

Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ setzt man

$$x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log x)$$

Hieraus folgen die Potenzgesetze

$$\begin{aligned}
x^0 &= \exp(0 \cdot \log x) = \exp(0) = 1 \\
x^1 &= \exp(1 \cdot \log x) = \exp(\log x) = x \\
e^\alpha &= \exp(\alpha \cdot \log e) = \exp(\alpha) \\
e &= \exp(1) \implies \log e = \log(\exp(1)) = 1 \\
x^\alpha \cdot x^\beta &= \exp(\alpha \cdot \log x) \cdot \exp(\beta \cdot \log x) \\
&= \exp(\alpha \cdot \log x + \beta \cdot \log x) = \exp((\alpha + \beta) \cdot \log x) = x^{\alpha+\beta} \\
(x^\alpha)^\beta &= \exp(\beta \cdot \log(x^\alpha)) = \exp(\beta \cdot \log(\exp(\alpha \cdot \log x))) \\
&= \exp(\beta \cdot \alpha \cdot \log x) = x^{\alpha \cdot \beta} \\
\sqrt[n]{x} &= x^{\frac{1}{n}}, \text{ denn } (x^{\frac{1}{2}})^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^n = x
\end{aligned}$$

# 4 Differentierbare Funktionen einer reellen Variable

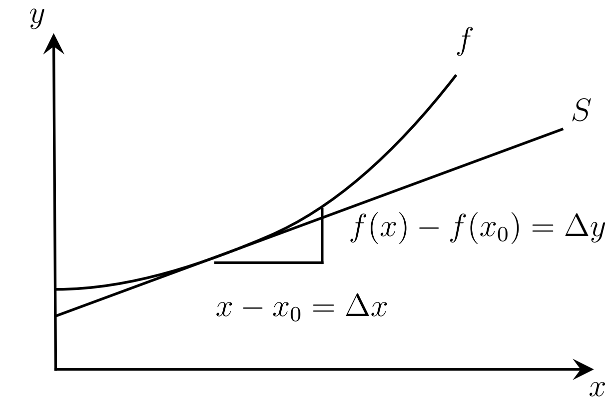
Im folgenden: $I \subset \mathbb{R}$: verallgemeinertes Intervall

### 4.0.1 Definition

Eine Funktion $f\colon I \mapsto \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt differentierbar an der Stelle $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \qquad x \in I \setminus f(x_0)$$

existiert. $f$ ist differentierbar, falls $f$ an jeder Stelle $x_0 \in I$ differentierbar ist.
andere Notation: $\dot{f}$, $\mathrm{D}f$, $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(x_0)$




$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Höhere Ableitungen: $(f')' = f'', f''', f'''', \ldots, f^{(n)}, \frac{\mathrm{d^n f}}{\mathrm{dx^n}}(x_0)$

### 4.0.2 Satz

Eine Funktion $f$: $I \mapsto \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist in $x_0 \in I$ genau dann differentierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gibt, so dass $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x) \qquad (x \in I)$, wobei $f$ eine Funktion ist mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0 \qquad\qquad (\text{also } \varphi(x_0) = 0 \text{ und } \varphi'(x_0) = 0)$$

**Landau-Symbole:**

$$f(x) = O(x) \text{ falls } |f(x)| \leq c|x| \;\; \forall\, x \in B_\varepsilon(0)$$

$$f(x) = o(x) \text{ falls } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\text{also } f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(x - x_0)$$

**Beweis:**

i) Hinrichtung ($\Rightarrow$):

Sei $f$ in $x_0$ differenzierbar, setze $c := f'(x_0)$. Definiere $\varphi$ durch

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

$\Longrightarrow f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)$ gewünschte Darstellung

$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0) = c} - c$ (falls $x \neq x_0$)

$$x_0 \neq x \to x_0$$

ii) Rückrichtung ($\Leftarrow$):

Nehme an, f habe die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)$$
$$\Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} = c + \frac{\varphi(x)}{x - x_0}$$
$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} = c$$

Also ist $f$ in $x_0$ differentierbar und $f'(x_0) = c$.

$\square$

### 4.0.3 Korollar

Ist $f$ in $x_0$ differentiertierbar so ist $f$ in $x_0$ stetig.

**Beweis**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + \underbrace{c(x-x_0)} \to 0 + \varphi(x)\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \underbrace{\frac{\varphi(x)}{x-x_0}}_{\to 0} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0$$

Erinnerung: $\lim f(x) = f(x_0)$ bedeutet: $\forall$ Folge $x_n$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

### 4.0.4 Satz (Rechenregeln)

Mit $f$, $g$: $I \mapsto \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und auch $f+g$, $f\cdot g$ und (falls $g(x_0)\neq 0$) auch $\frac{f}{g}$ in $x_0$ differentierbar, und es gilt:

i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

**Beweis:**

i)

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\neq x_0]{x\to x_0} f'(x_0)+g'(x_0)$$

ii)

$$\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)}_{\to g'(x_0)}$$

da g als differentierbare Funktion in $x_0$ stetig ist.

$$\xrightarrow[x\neq x_0]{x\to x_0} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

iii) $g(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Außerdem ist g als differentierbare Funktion in $x_0$ stetig $\implies \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon\ \forall\ |x - x_0| < \delta$

Wähle $\varepsilon = \frac{|g(x_0)|}{2}$

$\implies |g(x)| > \left|\frac{g(x_0)}{2}\right| \neq 0\ \forall\ |x - x_0| < \delta$.

$$|g(x)| = |g(x) - g(x_0) + g(x_0)| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| > |g(x_0)| - \frac{|g(x_0)|}{2} = \frac{|g(x_0)|}{2}$$

**Nachtrag** $f\colon I \mapsto I^*$ streng monoton und $\implies f^{-1}\colon I^* \mapsto I$ auch streng monoton

**Beweis** Œ $f$ streng monoton steigend
also $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
Sei nun $y_1, y_2 \in I^*$ mit $y_1 < y_2$
Setze $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$
Falls $x_1 = x_2 \implies y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_z$ ein Widerspruch
Falls $x_1 > x_2 \implies y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_z$ ein Widerspruch
$\implies x_1 < x_2$ also $f^{-1}$ streng monoton.

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \underbrace{\frac{-1}{g(x)\cdot g(x_0)}}_{\to \frac{-1}{g(x_0)^2}} \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0)$, wende jetzt Produktregel an.

□

### 4.0.5 Beispiele

i) $f(x) = x,\ f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

ii) $f(x) = x^n$ ist nach Produktregel auch differentierbar

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x'x + xx' = 2x$$

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$$

(Bemerkung: Jedes Polynom ist differentierbar und damit insbesondere stetig.)

iii) $f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (Quotientenregel mit $f = 1$, $g(x) = x$)

iv) $f(x) = \exp(x)$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Berechne die Ableitung am Ursprung ($x \neq 0$)

$$\frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \underbrace{\frac{1}{1!}}_{=1} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

$$\left| \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} - 1 \right| \leq |x| \left( \underbrace{\frac{1}{2!}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|x|}{3!}}_{\leq \frac{|x|}{1!}} + \underbrace{\frac{|x|^2}{4!}}_{\leq \frac{|x|^2}{2!}} + \dots \right)$$

$$\leq |x| \left( 1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \dots \right) = |x| \cdot \exp(|x|)$$

Wir können jetzt den limes $x \to 0$, $x \neq 0$ bilden.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} - 1 \right| = 0 \cdot 1 = 0$$

$\implies \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x} = 1$, also $\exp'(0) = 1$

An allgemeiner Stelle $x_0$ verwende Funktionalgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \exp(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \exp(x_0) \cdot \frac{\exp(x - x_0) - \exp(0)}{x - x_0}$$
$$= \exp(x_0) \exp'(0) = \exp(x_0)$$

also $\exp'(x) = \exp(x)$

### 4.0.6 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f\colon I \mapsto \mathbb{R}$ streng monoton in $x_0$ differentierbar mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ in $y_0 = f(x_0)$ differentierbar und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Beweis** Zu zeigen: $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$
$y^* = f(I)$
Sei $(y_n)$ eine beliebige Folge mit $y_n \neq y_0$, $y_0 \in I^*$ und $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y_0$
Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$ Folge in $I$
Da $f^{-1}$ stetig ist, ist $x_n$ auch konvergent. $x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_n}}_{\xrightarrow{n \to \infty} f'(x_0)}}$$

da $x_n \to x_0$ und $f$ in $x_0$ differentierbar
Da $f^{-1}(x_0) \neq 0$ nach Voraussetzung, folgt nach den Konvergenzsätzen für Folgen, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Da $(y_n)$ beliebig ist, folgt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

### 4.0.7 Beispiel

$f(x) = \exp(x)$
exp: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto y = e^x \qquad$ log: $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad y \mapsto x = \log(y)$
$\log'(y_0) = \frac{1}{\exp'(x_0)} = \frac{1}{\exp(x_0)} = \frac{1}{y_0}$
also ist $\log \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ differentierbar und $\log'(y) = \frac{1}{y}$

### 4.0.8 Satz (Kettenregel)

Seien $I$, $I^*$ zwei verallgemeinerte Intervalle und seien $f$: $I \mapsto \mathbb{R}$ und $g$: $I^* \mapsto \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(I) \subset I^*$. Setze man voraus, dass $f$ in $x_0 \in D$ und $g$ in $y_0 = f(x_0) \in I^*$ differentierbar ist. Dann ist die Komposition $h := g \circ f \quad I \mapsto \mathbb{R}$ in $x_0$ differentierbar und $(g \circ f)'(x_0) = g'(\underbrace{y_0}_{=f(x_0)}) \cdot f'(x_0)$

**Beweis:** Definiere $g^* : I^* \mapsto \mathbb{R}$

$$g^*(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$$

Da $g$ differentierbar ist, gilt

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

Also ist $\lim\limits_{y \to y_0} g^*(y) = g^*(y_0)$
Somit ist $g^*$ an der Stelle $y_0$ stetig. Für $x = x_0$ gilt

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g^*(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Falls $f(x) = f(x_0)$ gilt die Gleichung (da $f$ als differentierbare Funktion in $x_0$ stetig ist)

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = g^*( \overbrace{f(x)}^{\to f(x)=y_0} ) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g^*(y_0) \; \forall \; x \neq x_0, x \in I$$

ebenfalls $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$ da $g^*$ stetig ist $\to f'(x_0)$ da $f$ in $x_0$ differentierbar

$$= g^*(y_0) f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)$$

□

### 4.0.9 Definition

$C^0(I, \mathbb{R})$: Menge der stetigen Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R} = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ stetig }\}$
$C^{\mathbb{R}}(I, \mathbb{R})$: Menge der k-mal stetig differentierbaren Funktion $= \{f : I \mapsto \mathbb{R} | f' \ldots f^{(*)}$ existieren und $f'$ stetig, $l - 0, -k\}$
$C^{\infty}(I, \mathbb{R})$: Menge der glatten Funktion $= \{f : D \mapsto \mathbb{R} : f^{(*)}$ existiert und ist stetig $\forall \; k \in \mathbb{N}_0\}$
Die Mengen sind sogar Vektorräume:

| | |
|---|---|
| $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ | Addition |
| $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ | Skalarmultiplikation |

$f(x) = 0 \; \forall \; x$ ist “0” in dem Vektorraum
Funktionenraum: Vektorraum, Vektoren und Funktionen unendlich dimensional

## 4.1 Lokale Extrema, der Mittelwertsatz

### 4.1.1 Definition

Eine Funktion $f\colon I \mapsto \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum (Minimum) falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$) $\forall\, x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I$
$x_0$ heißt innerer Punkt, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset I$
Entsprechend $x_0$ striktes lokales Maximum (Minimum) falls $x_0$ lokales Maximum und $f(x_0) > f(x)$ $\forall\, x \in B_\varepsilon(x_0) \cap I, x \neq x_0$

### 4.1.2 Satz

Besitzt $f$ ein lokales Maximum (oder Minimum) an einem inneren Punkt $x_0$ und ist $f$ an der Stelle $x_0$ differentierbar so ist $f'(x_0) = 0$

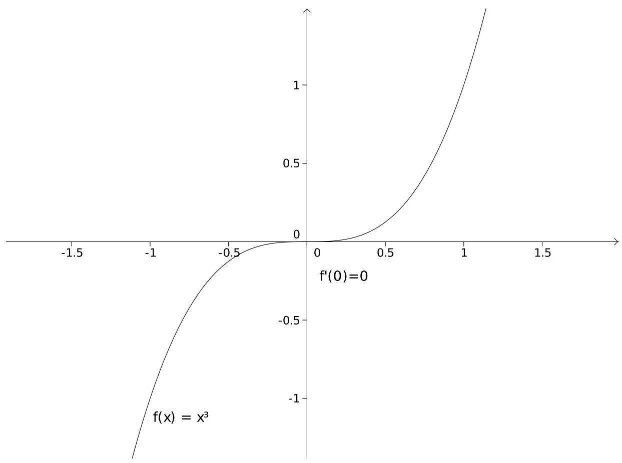
**Beweis:** Sei $x_0 \in I$ ein lokales Maximum, $f$ in $x_0$ differentierbar und $x_0$ innerer Punkt. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset I$ und

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } x < x_0 \\ \leq 0 & \text{falls } x > x_0 \end{cases}$$

Bilde nun links- und rechtsseitigen Limes (existieren, da $f$ differentierbar)
$\implies f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$
$\implies f'(x_0) = 0$

□

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für lokales Extremum




$x = 0$ ist sog. loritisches Produkt (also $f'(0) = 0$) aber kein lokaler Extrempunkt.

### 4.1.3 Satz (Rolle)

Sei $a < b$ und $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die auf $(a,b)$ differentierbar ist und $f(a) = f(b)$ gilt.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

**Beweis:** Falls $f$ konstant ist, ist $f' = 0$, also nichts zu beweisen.
Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ wo $f$ sein absolutes Maximum (oder Minimum) annimmt. Denn:
$W := f([a,b])$ Wertebereich
Sei $M = \sup W$. Es gibt dann $y_n \in W$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} M$
Es gibt $x_n \in [a,b]$ mit $y_n = f(x_n)$
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt ein $x_n$ einen HP $x_0$, also eine Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0$
Da $f$ stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_k \to M$$

$\implies f(x_0) = M \in \mathbb{R}$ Das Supremum wird also angenommen, also gibt es ein $x_0$ absolutes Maximum und $f(x_0) = M$
Da $f$ nicht konstant ist, gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > f(a) = f(b)$ oder $f(x_0) < f(a)$
Dann ist das absolute Maximum (bzw. Minimum) von $f$ angenommen in einem Punkt $\xi(a,b)$ da $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$ also $\xi \neq a, b$
Nach Satz 4.1.2 ist dann $f(\xi) = 0$

□

### 4.1.4 These (Mittelwertsatz)

Sei $a < b$, $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $(a,b)$ differentierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

**Beweis:** Wir führen eine Hilfsfunktion $F : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ein

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

F ist stetig auf $[a,b]$ und

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) - f(a) = f(a)$$

$\Longrightarrow$ $F(a) = F(b)$ Nach dem Satz von Rolle gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1$$
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 4.1.5 Korollar

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und in $[a, b]$ differentierbar. Für die Ableitungen gelte:

$$m \leq f'(\xi) \leq M \quad \forall\, \xi \in (a, b)$$

Dann gilt für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ die Ungleichung in $(y-x) \leq f(y)-f(x) \leq M(y-x)$

**Beweis:** Betrachte $f\big|_{[x,y]}$ Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x, y)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \implies f(y) - f(x) = f(\xi)(y - x)$$
$$m(y - x) \leq f(\xi)(y - x) \leq M(y - x)$$

□

Die Aussage ist für komplexartige Funktionen (oder vergleichswertige Funktionen) i.a. falsch. Man hat immer noch

$$|f(y) - f(x)| \leq \max_{[x,y]} |f||y - x|$$

### 4.1.6 Korollar

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine differentierbare Funktion mit
$f'(x) = c \cdot f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ (Differentialgleichung, enthält $f$ und ihre Ableitungen)
Dann ist

$$f(x) = f(0) \cdot e^{cx}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

[in Worten: Für gegebene "Anfangswerte" $f(b)$ besitzt die Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $(*)$]

**Beweis:** Betrachte die Funktion $F(x) = f(x)e^{-cx}$
$\Longrightarrow F'(x) = f'(x)e^{-cx} + f(x)(e^{-cx})' = (c \cdot f(x)) \cdot e^{-cx} + f(x)(e^{-cx}(-c)) = 0$
Aus $F'(x) = 0$ folgt nach obrigen Spezialfall, dass $F$ konstant ist, also
$f(x)e^{-cx} = k \in \mathbb{R}$
$f(x)e^{cx}k$, $f(0) = e^{c \cdot 0}k = \mathbb{R}$, also $K = f(0)$

□

### 4.1.7 Korollar

Sei $f \in C'(I, \mathbb{R})$ mit $f'(x) \geq 0$ (bzw. $> 0$) für alle $x \in I$ ($I$ wieder verallgemeinertes Intervall)
Dann ist $f$ monoton steigend (bzw. strent monoton steigend)

**Beweis:** Sei $x < y$. Nach Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f(\xi)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{bzw. } >0}} \underbrace{(y - x)}_{>0} \geq 0$$

Also ist $f$ monoton steigend bzw. streng monoton steigend.

□

## 4.2 Trigonometrische Funktionen

Wir wissen schon:

$$\begin{aligned}
e^{it} &= \cos(t) + i\sin(t) \\
\cos(t) &= \mathrm{Re}(e^{it}) \\
\sin(t) &= \mathrm{Im}(e^{it}) \\
|e^{it}| &= 1, \text{ denn } |e^{it}|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{\overline{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

### 4.2.1 Lemma

Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ist glatt (vor der $C^\infty$) $\quad t \to e^{it}$ und löst die Differentialgleichung

$$\phi'(t) = i\phi(t)$$

mit Anfangswert $\phi(0) = 1$

**Beweis:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it} = e^{it}i$ (Kettenregel) also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi(t) = i\phi(t)$
Also ist $\phi(t)$ differentierbar und folglich auch stetig. Die höheren Ableitungen kann man induktiv bezeichnen $\phi^{(t)} = i^t\phi$
Also ist $\phi$ beliebig oft differentierbar und alle Ableitungen auch stetig $\implies \phi \in C^\infty$

□

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it} = ie^{it} \implies \mathrm{Re}(ie^{it}) = \mathrm{Re}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{Re}(e^{it})$, denn:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}-e^{it'}}{t-t'}\right) = \frac{\mathrm{Re}\,e^{it} - \mathrm{Re}\,e^{it'}}{t-t'}$$

### 4.2.2 Satz (Rechenregeln)

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) &= -\cos\alpha
\end{aligned}\Bigg\}\ \text{Symmetrieeigenschaften}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}\Bigg\}\ \text{Additionstheoreme}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sin(t) &= \cos(t) \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\cos(t) &= -\sin(t)
\end{aligned}\Bigg\}\ \text{Differentialgleichungen}$$

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

**Beweis:** $e^{it} = \cos t + i\sin t$, konjugiere komplex:
$e^t = \cos t - i\sin t$ $\quad e^{-it} = \sin(-t) + i\cos(-t)$ $\qquad (\cos t = \cos(-t)$ und $\sin t = \sin(-t))$
$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\cos t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{Re}(e^{it}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it}\right) = \mathrm{Re}(ie^{it}) = -\,\mathrm{Im}(e^{it}) = -\sin t$$

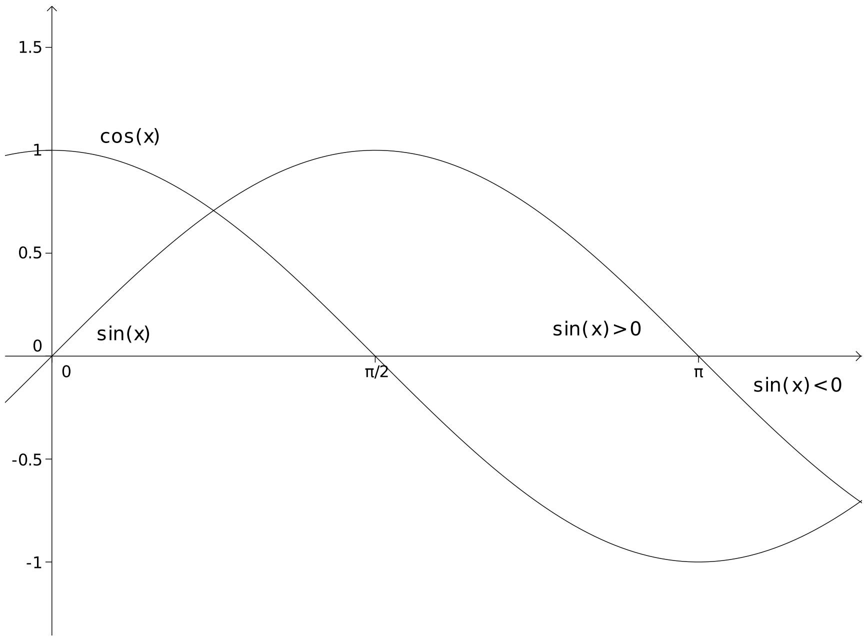
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sin t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{Im}(e^{it}) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{it}\right) = \mathrm{Im}(ie^{it}) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \cos t$$

$$1 = |e^{it}|^2 = e^{it}e^{-it} = (\cos t + i\sin t)(\cos t - i\sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t$$

□

#### 4.2.3 Lemma

Es gibt eine Zahl $\pi > 0$, so dass $\sin \pi = 0$, $\sin t > 0 \ \forall \ 0 < t < \pi$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
Die Funktion $\cos t$ ist monoton fallend auf $[0, \pi]$, erfüllt $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$ und bildet das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab.




**Beweis:** Da $\cos 0 = \mathrm{Re}(e^{i0}) = \mathrm{Re}(e^0) = 1$ gibt es wegen des Integral der cos-Funktion ein $\delta > 0$ mit $\cos t > 0$ auf $[0, \delta]$. Da $\sin t = \cos t > 0$ auf $[0, \delta]$ ist $\sin t$ auf $[0, \delta]$ streng monoton steigend, also $\sin t > 0 \ \forall \ 0 < t \leq \delta$

**Behauptung:** $\exists \ t_0 > \delta$ mit $\sin(t_0) = 0$

**Beweis:** Ansonsten wie (nach dem Zwischenwertsatz) $\sin t > 0 \ \forall \ t > 0$
Da $\cos'(t) = -\sin(t) < 0$ wie $\cos(t)$ monoton fallend auf $[0, \infty]$
Da $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \implies \cos^2(t) \leq 1$, also $\cos(t) \in [-1, 1]$
*[Behauptung: Für jede noch monoton beschränkte, monoton fallende Funktion $f(x)$ existiert $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) \ \forall \ t_n$ mit $t_n \to \infty$*
*Beweis: Konvergenz $t \to \infty$ bedeutet konvergent $y_n = f(t_n)$. $y_n$ hat dann einen HP.]*

**Beweis:** $\lim\limits_{t\to\infty} f(t_n)$ existiert bedeutet, dass $\forall$ Folgen $(t_n)$ mit $t_n \to \infty$ die Folge $\lim\limits_{t\to\infty} f(t_n)$ existiert.

Also zu zeigen: Gegeben $(t_n)$ mit $t_n \to \infty$ gilt:
$f(t_n)$ ist konvergent $y_n := f(t_n)$
reelle Folge
$f$ ist nach Vereinbarung beschränkt $|f(t)| \leq c \; \forall \; t$
Damit ist $(y_n)$ auch beschränkt (denn $|y_n| \leq c$)
Nach Bolzano-Weierstraß besitzt $(y_n)$ einen HP $y$. Es bleibt zu zeigen, dass es nur einen HP gibt.
Seien $y$, $\widetilde{y}$ HP, also $y_{n_k} \to y$ und $y_{n_k} \to \widetilde{y}$
$\forall \; \varepsilon \; \exists \; N$ mit $|y - y_{n_k}| < \varepsilon \; \forall \; k \geq N$
$\widetilde{y} - y_n| < \varepsilon \; \forall \; k \geq N$ und $t_{n_k} \to \infty$
Wähle $t_{n_l} > t_{n_k} \implies y_{n_l} < y_{n_k}$ (da $f$ monoton fallend)
$\widetilde{y} - \varepsilon \leq y_{n_l} \leq y_{n_k} \leq y + \varepsilon \implies \widetilde{y} \leq y + 2\varepsilon$
Vertausche Zahlen von $y$ und $\widetilde{y}$: $y \leq \widetilde{y} + 2\varepsilon$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $y = \widetilde{y}$

□

$\lim\limits_{t \to \infty} \cos(t) = y_{n_l} \qquad -1 \leq y \leq 1$
Wäre $y = -1$ so gäbe es $R > 0$, so dass $\cos t < -\frac{1}{2} \; \forall \; t < R$
Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann $\forall \; t > R$ ein $\xi \in (R, t)$, so dass:

$$\sin(t) - \cos(R) = \underbrace{\cos(\xi)}_{< -\frac{1}{2}}(t - R)$$

$$\sin(t) \leq \sin(R) - \frac{1}{2}(t - R)$$

Für genügend großes $t$ wie dann $\sin(t) < -1$, im Widerspruch zu $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
Wie andererseits $\mu > -1$, so folgt wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ und $1 > \cos(t) > \mu > -1$ $\implies \cos^2(t) < 1$ dass es ein $\sigma > 0$ gibt mit

$$\sin(t) \geq \sigma \; \forall \; t > R$$

$\implies \cos(t) - \cos(R) = -\sin(\xi)(t - R) \leq -\sigma(t - R)$
$\cos(t) - \cos(R) - \sigma(t - R)$, also $\cos(t) < -1$ für genügend großes $t$, ein Widerspruch.
Also gibt es ein $t_0 > 0$ mit $\sin(t_0) = 0$. Betrachte das Infimum dieser Zahlen mit $\pi$. Wegen der Stetigkeit ist dann $\sin \pi = 0$ und $\sin(t) > 0$ auf $(0, \pi)$
Außerdem wissen wir, dass $\pi > \sigma$

**Beweis: (Fortsetzung)**

i)
$$\sin 0 = 0,\ \cos 0 = 1 \text{ da } e^{i0} = e^0 = 1 \tag{$*$}$$

ii) $\cos t$ auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend:

Sei $t_1,\ t_2 \in [0, \pi]$ mit $t_1 < t_2$

$\cos t_2 - \cos t_1 = \cos'(\xi)(t_2 - t_1)$ für $\xi \in (0, \pi)$ nach Mittelwertsatz

$= -\underbrace{\sin(\xi)}_{>0}\underbrace{(t_2 - t_1)}_{>0} < 0$

also $\cos(t)$ auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend.

iii) $\cos \pi = -1$

$\sin \pi = 0$ nach $(*)$ $\implies \cos^2 \pi = 1 - \sin^2 \pi = 1 \implies \cos \pi = \pm 1$.

Da $\cos 0 = 1$ und $\cos t$ streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ folgt $\cos \pi < 1$.

$\implies \cos \pi = -1$

iv) $\cos t : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$ ist bijektiv

Injektiv: Sei $t, t' \in [0, \pi]$ und $t \neq t'$. Nach strengv Monotonie ist damit $\cos t \neq \cos t'$.

Surjektiv: $\cos(0) = 1$, $\cos \pi = -1$

Sei $\tau \in [-1, 1]$. Nach Zwischenwertsatz gibt es ein $t \in [0, \pi]$ mit $\cos t = \tau$.

v) $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0$:

$-1 = \cos \pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\frac{\pi}{2}) = (1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{2})$

$\implies \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 \implies \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (da $\sin t > 0\ \forall\ t \in (0, \pi)$ nach $(*)$)

$\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 0 \implies \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\square$

### 4.2.4 Lemma

Die Funktionen $\cos t$ und $\sin t$ sind periodisch mit Periode $2\pi$, d.h. $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$, $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$

**Beweis:** $\cos 2\pi = \cos(\pi + \pi) = \cos^2 \pi - \sin^2 \pi = 1$
$\sin 2\pi = 2 \sin \pi \cos \pi = 0$
Es folgt

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \overbrace{\cos 2\pi}^{=1} - \sin t \overbrace{\sin 2\pi}^{=0} = \cos t$$
$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \overbrace{\cos 2\pi}^{=1} - \cos t \overbrace{\sin 2\pi}^{=0} = \sin t$$

□

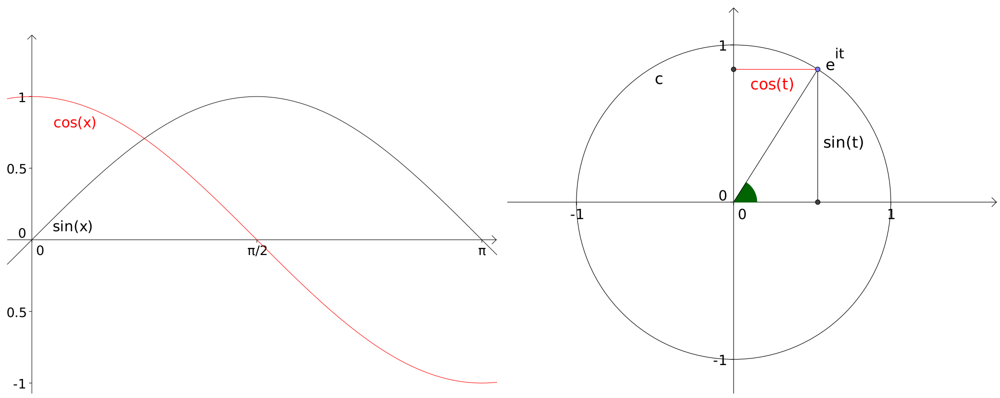



Abbildung 1: Kreisbahn (da $|e^{it}| = 1$)

**Bemerkungen:** Reihendarstellungen

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \underbrace{1}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{it}{1!}}_{\text{imaginär}} + \underbrace{\frac{(it)^2}{2!}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{(it)^3}{3!}}_{\text{imaginär}} + \dots$$

$$\implies \cos t = \operatorname{Re} e^{it} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n!}$$

$$\implies \sin t = \operatorname{Im} e^{it} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Weitere Trigonometrische Funktionen:

$$\tan t := \frac{\sin t}{\cos t}$$
$$\cot t := \frac{\cos t}{\sin t}$$

Hyperbel-Funktionen:

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

# 5 Das eindimensionale Riemannsche Integral

Im folgenden: Funktion $f : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ($[a, b]$: abgeschlossenes, beschränktes Intervall)
Nehme an, dass $f$ beschränkt, also $\exists\ c \in \mathbb{R}$ mit $-c \leq f(x) \leq C\ \forall\ x \in I$

$$\mathfrak{B}(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ beschränkt}\}$$

### 5.1.1 Definition

i) Eine Zerlegung $Z$ von $[a, b]$ in Teilintervalle $I_j$ der Längen $|I_j|$, $j = 1, ..., k$, ist eine Menge von Punkten

   $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$

   derart, dass $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Wir setzen $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} =: |I_j|$

   Die Feinheit der Zerlegung ist

$$\Delta(Z) = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_k\}$$

ii) Aus jedem $I_j$ wählen wir einen Punkt $\xi_j \in I_j$ aus und setzen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Für $f \in \mathfrak{B}(I)$ nennt man

$$S_Z(f, \xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j$$

   eine Riemannsche Zwischensumme

iii) Für $f \in \mathfrak{B}(I)$ setzen wir

$$\underline{m}_j = \inf_{I_j} f = \inf\{f(x) : x \in I_j\}$$

$$\overline{m}_j = \sup f$$

$\overline{S}_Z := \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{m}_j \Delta x_j$ (Obersumme)

$\underline{S}_Z := \sum\limits_{j=1}^{k} \underline{m}_j \Delta x_j$ (Untersumme)

Da $\underline{m}_j \le f(\xi_j) \le \overline{m}_j$ folgt

$\underline{S}_Z(f) \le S_Z(f,\xi) \le \overline{S}_Z(f)$

### 5.1.2 Definition

i) Eine Zerlegung $Z^*$ heißt Verfeinerung von $Z$, falls alle Teilpunkte $x_0, \ldots, x_k$ von $Z$ auch Teilpunkte von $Z^*$ sind.

ii) Eine gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \vee Z_2$ von $Z_1$ und $Z_2$ ist eine Zerlegung, dessen Teilpunkte genau die Vereinigung der Teilpunkte von $Z_1$ und $Z_2$ sind.

### 5.1.3 Lemma

Ist $Z^*$ Verfeinerung von $Z$, so ist

$$\underline{S}_Z(f) \le \underline{S}_{Z^*}(f) \le \overline{S}_{Z^*}(f) \le \overline{S}_Z(f)$$

**Beweis:** $Z$ habe Teilpunkte $x_0, \ldots, x_k$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ Teilintervalle
$Z^*$ habe Teilpunkte $x_0^*, \ldots, x_k^*$, $I_j^* = [x_{j-1}^*, x_j^*]$ Teilintervalle
Jedes $I_l^*$ ist in einem der $I_j$ enthalten, $I_l^* \subset I_j$

$$\overline{m}_l^* = \sup_{I_l^*} f \le \sup_{I_j} = \overline{m}_l$$

$$\underline{m}_l^* = \inf_{I_l^*} f \ge \inf_{I_j} = \underline{m}_l$$

$$\Longrightarrow \overline{S}_{Z^*}(f) = \sum_{l=1}^{k} \overline{m}_l^* |I_l^*| \le \sum_{l=1}^{k} \overline{m}_{j(l)} |I_l^*| = \sum_{j=1}^{k} \overline{m}_j |I_j| = \overline{S}_Z(f)$$

analog $\underline{S}_{Z^*}(f) \ge \underline{S}_Z(f)$

$\square$

### 5.1.4 Definition

Für $f \in \mathfrak{B}(I)$ setzt man

$$\underline{I}(f) := \sup\{\underline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

$$\overline{I}(f) := \inf\{\overline{S}_Z(f) : Z \text{ Zerlegung von } I\}$$

Die Menge $\{\underline{S}_Z(f)$: $Z$ Zerlegung $\}$ ist nach oben beschränkt, weil $\underline{S}_Z \leq \overline{S}_{Z_0}$ für beliebige, fest gewählte Zerlegung $Z_0$
Damit ist $\underline{I}(f) := \sup\{\underline{S}_Z$: $Z$ Zerlegung $\} < \infty$
Für Verfeinerung $Z^*$ von $Z$ gilt $\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z^*}(f)$
Entsprechend ist $\overline{I}(f) := \inf\{\overline{S}_Z$: $Z$ Verfeinerung $\} > -\infty$

### 5.1.5 Lemma

Für beliebige Zerlegungen $Z_1$ und $Z_2$ gilt $\underline{S}_{Z_1} \leq \underline{S}_{Z_2}$

**Beweis:** Sei $Z = Z_1 \vee Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt nach Lemma 5.1.3

$$\underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f)$$

$$\underbrace{\underline{S}_{Z_k}}_{\to \underline{I}(f)} \leq \underbrace{\overline{S}_{\widetilde{Z}_l}}_{\to \overline{I}(f)}$$

Wähle Zerlegungen $Z_k$ und $\widetilde{Z}_l$ mit $\underline{S}_{Z_k}(f) \to \underline{I}(f)$ und $\overline{S}_{\widetilde{Z}_l}(f) \to \overline{I}(f)$.

### 5.1.6 Definition

Eine Funktion $f \in \mathfrak{B}(I)$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Wir setzen

$$I(f) := \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

und nennen $I$ das bestimmte Integral von $f$ über $[a, b]$,
Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f = \int_I f(x)dx = I(f)$$

$R(I)$: Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf Intervall $I = [a, b]$.

**Frage:** Welche Funktionen sind Riemann-integrierbar.

### 5.1.7 Satz (I Integrabilitätskriterium)

$f \in R(I)$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z$ von $I$, so dass $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) < \varepsilon$.

**Beweis:**

i) Rückrichtung ($\Leftarrow$):

$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}_Z(f)$

$\implies \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$

Da $\varepsilon$ beliebig ist, folgt $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$

ii) Hinrichtung ($\Rightarrow$):

Nach Definition des Supremums (Infimums) gibt es $Z_1$ und $Z_2$

$\underline{I}(f) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}_Z + \frac{\varepsilon}{2}$

$\overline{I}(f) \geq \overline{S}_{Z_2}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \underline{S}_Z - \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $Z = Z_1 \vee Z_2 \implies \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \varepsilon$.

□